Friedrich U. Mathiak

Übungsaufgaben zu TM I

Grundlagen der Statik

Lateinische Schrift

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z ß ä ö ü

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z Ä Ö Ü

Griechische Schrift

α	β	γ	δ	ε	ς	η	ϑ	ι	κ	λ	μ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Jota	Kappa	Lambda	My

ν	ξ	ο	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
Ny	Ksi	Omikron	Pi	Rho	Sigma	Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Jota	Kappa	Lambda	My

Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
Ny	Ksi	Omikron	Pi	Rho	Sigma	Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

1 Grundlagen der Vektorrechnung

Aufgabe 1-1

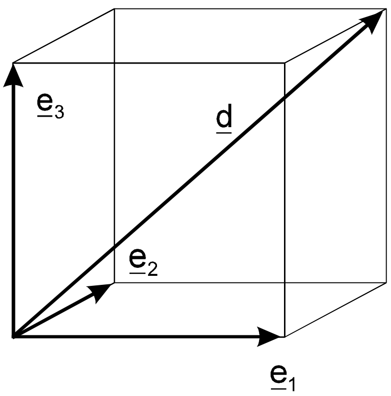
Zerlegen Sie den Vektor $\underline{x} = 2\underline{e}_x - 3\underline{e}_y + 9\underline{e}_z = \{2;-3;9\}$ in Richtung der drei Vektoren:

$$\underline{a} = 2\underline{e}_x - \underline{e}_y + \underline{e}_z$$
$$\underline{b} = \underline{e}_x + 2\underline{e}_y - 2\underline{e}_z$$
$$\underline{c} = \underline{e}_x + \underline{e}_y + 2\underline{e}_z$$

Dazu prüfen Sie zunächst, ob $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 1-2

Berechnen Sie die Winkel zwischen der Raumdiagonalen $\underline{d}$ und den benachbarten Kanten des skizzierten Würfels.



Aufgabe 1-3

Gegeben sind drei Vektoren im kartesischen Koordinatensystem:

$$\underline{a} = 3\underline{e}_x - 2\underline{e}_y - \underline{e}_z$$
$$\underline{b} = 2\underline{e}_x + \underline{e}_y - 2\underline{e}_z$$
$$\underline{c} = \underline{e}_x + 3\underline{e}_y + 2\underline{e}_z$$

sowie deren Skalarprodukte mit dem vierten Vektor $\underline{d}$

$$\underline{a} \cdot \underline{d} = 11, \quad \underline{b} \cdot \underline{d} = -1, \quad \underline{c} \cdot \underline{d} = -5$$

Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\underline{d}$ in der Basis $\langle \underline{e}_x ; \underline{e}_y ; \underline{e}_z \rangle$

Aufgabe 1-4

Gegeben ist eine zweidimensionale Vektorbasis $\langle \underline{g}_1, \underline{g}_2 \rangle$ mit

$$\underline{g}_1 \cdot \underline{g}_1 = 1$$
$$\underline{g}_1 \cdot \underline{g}_2 = \underline{g}_2 \cdot \underline{g}_1 = 2$$
$$\underline{g}_2 \cdot \underline{g}_2 = 16$$

In dieser Basis sind die Skalarprodukte eines Vektors $\underline{x}_1$ mit den Basisvektoren $\underline{g}_1$, $\underline{g}_2$ gegeben

$$\underline{x}_1 \cdot \underline{g}_1 = 5$$
$$\underline{x}_1 \cdot \underline{g}_2 = 2$$

Ermitteln Sie:

a) Die Komponenten von $\underline{x}_1$ in der Basis $\langle \underline{g}_1, \underline{g}_2 \rangle$

b) Einen zu $\underline{x}_1$ orthogonalen Vektor $\underline{x}_2$, der bzgl. der Basis $\langle \underline{g}_1, \underline{g}_2 \rangle$ die Form $\underline{x}_2 = \alpha \underline{g}_1 + \underline{g}_2$ haben soll.

c) Die zu $\underline{x}_1$ möglichen orthogonalen Vektoren $\underline{x}_2$ in der Basis $\langle \underline{g}_1, \underline{g}_2 \rangle$ mit dem Betrag $|\underline{x}_2| = 1$.

Aufgabe 1-5

Gegeben sind die Punkte P_1 (-1;2;4); P_2 (3;-2;1); P_3 (1;2;1) und P_4 (2;-2;2).

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g_1 und g_2, die durch die Punkte P_1, P_2 bzw. P_3, P_4 festgelegt sind.
b) Sind die Geraden parallel?
c) Welchen Abstand haben die beiden Geraden g_1 und g_2?
d) Bestimmen Sie die Lage der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen g_1 und g_2 sowie die Gleichung der dieser Strecke entsprechenden Verbindungsgeraden.
e) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt P_5 (1;1;1) hindurchgeht und zu den Geraden g_1 und g_2 senkrecht verläuft?

Aufgabe 1-6

Gegeben sind fünf Punkte im Raum:

P_1 (-1 ; 2 ; 4); P_2 (3 ; -2 ; 1); P_3 (1 ;2 ; 1);
A (9 ; -6 ; -5); B (1 ; 0 ; 2)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der durch die Punkte P_1, P_2, P_3 bestimmten Ebene in Parameterform.
b) Überprüfen Sie, ob die Punkte A und B in dieser Ebene liegen.
c) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt D des Lotes vom Punkt B auf dieser Ebene
d) Berechnen Sie die Länge des Lotes BD.

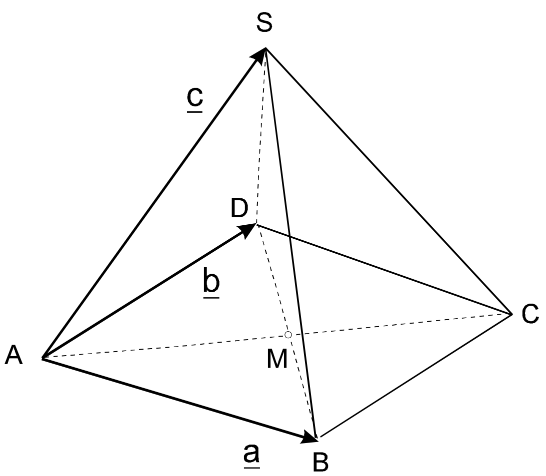
Aufgabe 1-7

Ausgehend von der Parameterdarstellung: $\underline{r} = \overline{0P}_1 + \lambda \overline{P_1P}_2 + \mu \overline{P_1P}_3$

der Ebene E aus **Aufgabe 1-6** bestimmen Sie die Hesse*sche Normalform* dieser Ebene.

1. Wie groß ist der Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung?
2. Wie weit sind die Punkte B (1 ; 2 ; -1) und C (5 ;-2 ; -2) von der Ebene entfernt?

Aufgabe 1-8

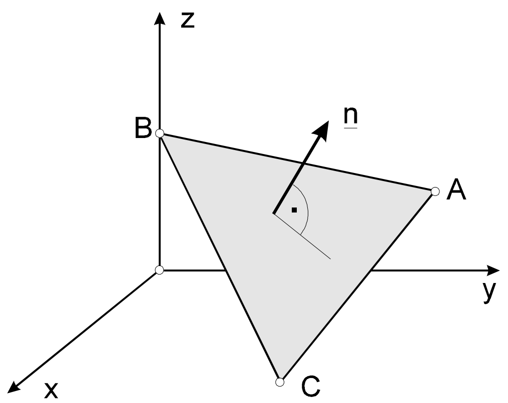


Die Grundfläche A,B,C,D einer Pyramide sei ein Parallelogramm, das durch die Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannt wird. Der Vektor zur Spitze sei $\underline{c}$.

Bestimmen Sie die Kantenlängen der Pyramide, die von ihnen eingeschlossenen Winkel sowie die Vektoren $\underline{a}_{AM}$ und $\underline{a}_{MS}$.

Geg.: $\underline{a} = \{1;2;0\}; \underline{b} = \{2;1;1\}; \underline{c} = \{3;3;2\}$

Aufgabe 1-9



Ein Dreieck ist durch die Punkte A, B, C im Raum festgelegt: A = {0;2;1} ; B = {0;0;3} ; C = {2;3;0}

1. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?
2. Gesucht ist der Normaleneinheitsvektor $\underline{n}$, der senkrecht auf der Dreiecksfläche steht und nach außen zeigt.
3. Liegt der Punkt P = {1;1;2} in der Ebene, die durch die Punkte A, B, C aufgespannt wird?

Aufgabe 1-10

Welcher Punkt $\underline{x}^*$ der Geraden $\underline{x} = \underline{x}_1 + \lambda \underline{g}$

a) ist dem Nullpunkt am nächsten?

b) Welchen Abstand hat der Punkt $\underline{x}^*$ von der Geraden?

Aufgabe 1-11

Vorgegeben seien die beiden *windschiefen Geraden*

$$\underline{x} = \underline{x}_1 + \lambda \underline{g}_1 \qquad \underline{x} = \underline{x}_2 + t \underline{g}_2$$

mit

$$\underline{x}_1 = \{4;12;-1\} \qquad \underline{x}_2 = \{1;4;3\}$$
$$\underline{g}_1 = \{-1;4;-1\} \qquad \underline{g}_2 = \{-3;4;1\}$$

a) Gesucht ist der kürzeste Abstand dieser beiden Geraden.

b) Geben Sie die Lage der beiden Punkte auf den Geraden an, zwischen denen der kürzeste Abstand besteht.

Aufgabe 1-12

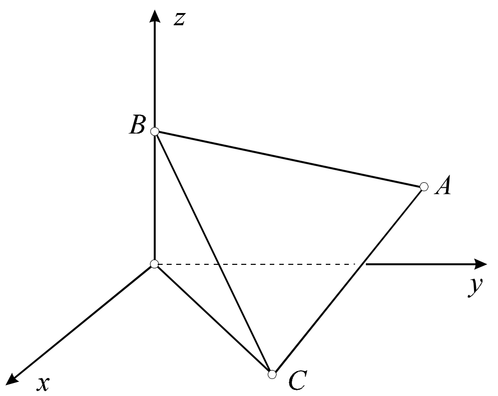
Beweisen Sie durch Ausrechnen anhand des Zahlenbeispiels mit

$$\underline{a} = \{1;2;3\} \quad \underline{b} = \{2;2;4\} \quad \underline{c} = \{3;1;5\} \quad \underline{d} = \{2;2;3\}$$

die Richtigkeit der Formeln

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$$
$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$$
$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = [\underline{a},\underline{c},\underline{d}]\underline{b} - [\underline{b},\underline{c},\underline{d}]\underline{a}$$

Aufgabe 1-13

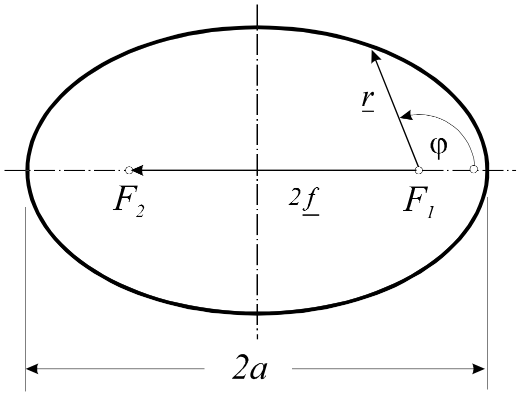


Durch die Punkte *A*, *B*, und *C* wird ein Tetraeder festgelegt.

$$A = \{0;2;1\};$$
$$B = \{0;0;3\};$$
$$C = \{2;3;0\}$$

1. Wie groß ist die Oberfläche des Tetraeders?
2. Wie groß ist das Volumen des Tetraeders?

Aufgabe 1-14



Leiten Sie mit Hilfe der Vektorrechnung die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten her:

$$r(\varphi) = \frac{a^2 - f^2}{a + f \cos\varphi}$$

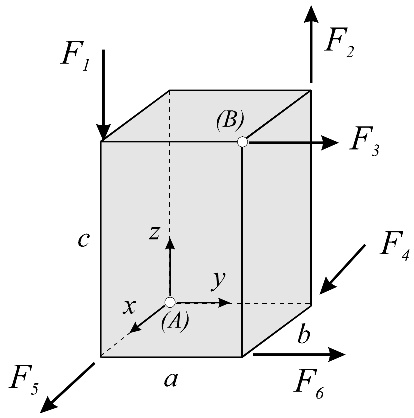
mit $r(\varphi) = |\underline{r}(\varphi)|; \quad f = |\underline{f}|$

Fragen:

1. Wie viele Zahlenangaben werden benötigt, um eine vektorielle Größe festzulegen?
2. Worin besteht bei einer schiefwinkligen Basis der Unterschied zwischen den Projektionen und den Komponenten einer vektoriellen Größe?
3. Erläutern Sie die Begriffe *Koordinate* und *Komponente* eines Vektors.
4. Was ist ein Basissystem?
5. Welche Basissysteme kennen Sie?
6. Bei welchen Bezugssystemen können wir die Zahlenwerte des Ortsvektors zugleich als Koordinaten interpretieren?

2 Reduktion von Kräftesystemen am starren Körper

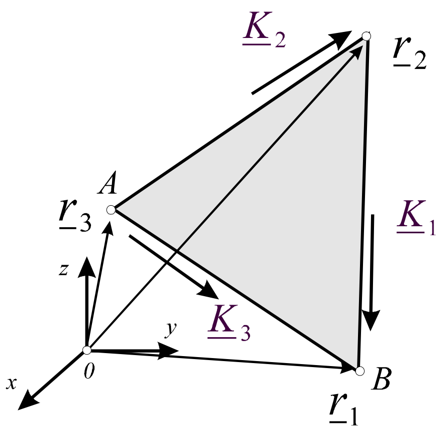
Aufgabe 2-1



Auf den skizzierten Quader mit den Seitenlängen *a*, *b* und *c* wirken die Kräfte F_1 bis F_6. Es sind die Resultierende $\underline{R}$ und die resultierenden Momente der Einzelkräfte bezogen auf die Punkte *A* und *B* zu berechnen. Außerdem sind die Beträge der Momentenvektoren zu ermitteln.

Geg.: $F_1 = F_2 = 2F$, $F_3 = F_4 = 3F$, $F_5 = F_6 = 4F$

Aufgabe 2-2

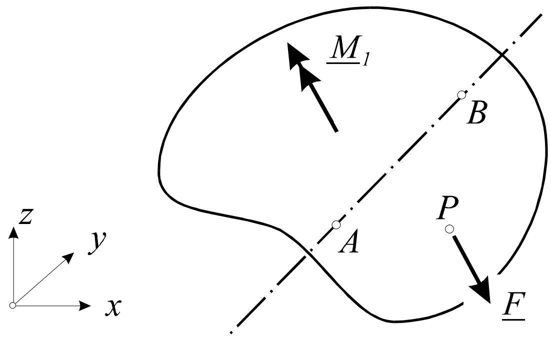


Ermitteln Sie für die Kräfte $\underline{K}_1$ bis $\underline{K}_3$, die parallel zu den Kanten eines starren Dreiecks mit den Eckpunkten $\underline{r}_1$ bis $\underline{r}_3$ angreifen:

a) die resultierende Kraft $\underline{R}$ nach Betrag und Richtung
b) das resultierende Moment $\underline{M}$ der bezüglich des Koordinatenursprungs „0“

$$K_1 = 5kN \qquad \underline{r}_1 = \{2;-2;4\} \quad [m]$$
$$K_2 = 6kN \qquad \underline{r}_2 = \{4;3;0\} \quad [m]$$
$$K_3 = 4kN \qquad \underline{r}_3 = \{4;4;1\} \quad [m]$$

Aufgabe 2-3



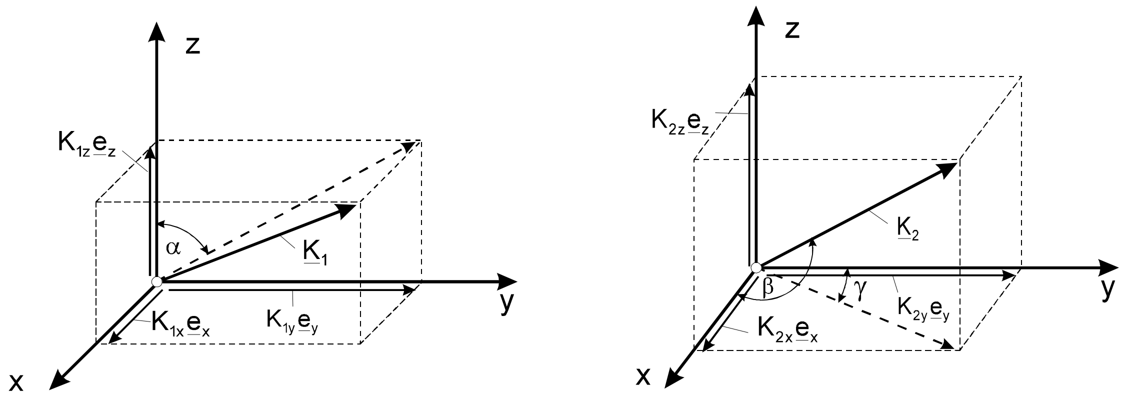
An einem starren Körper wirken die Kraft $\underline{F}$ im Punkte *P* und das Moment $\underline{M}_1$.
Ermitteln Sie

1. das resultierende Moment $\underline{M}$ und dessen Betrag bezüglich der Achse *A*-*B*.
2. Reduzieren Sie das Kräftesystem auf den Punkt *B*.

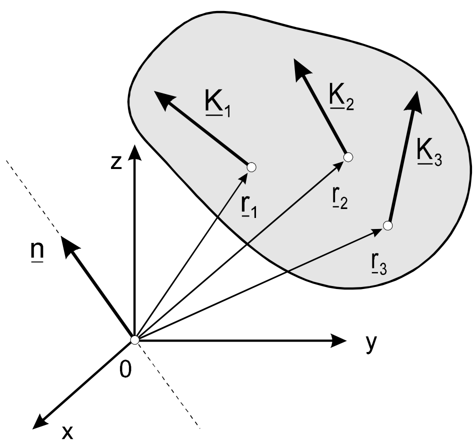
Geg.: $\underline{F} = (2;-2;-1)N$, $\underline{M}_1 = (-2;-3;2)Nm$
$A = (2;4;4)m$, $B = (4;5;6)m$, $P = (3;7;4)m$.

Aufgabe 2-4

Ermitteln Sie die Resultierende der beiden Kräfte $\underline{K}_1$ und $\underline{K}_2$ nach Größe und Richtung. Die Kräfte $\underline{K}_1$ und $\underline{K}_2$ greifen im selben Punkt an. Die x-Komponente der Kraft $\underline{K}_1$ beträgt 30 kN, die Projektion der Kraft $\underline{K}_1$ auf die z-y-Ebene hat den Betrag 20 kN und schließt mit der z-Achse den Winkel $\alpha = 60°$ ein. Die Kraft $\underline{K}_2$ hat den Betrag 40 kN und schließt mit der x-Achse den Winkel $\beta = 45°$ ein. Die Projektion der Kraft $\underline{K}_2$ auf die x-y-Ebene schließt mit der y-Achse den Winkel $\gamma = 70°$ ein.
Hinweis: Die y-Komponente der Kraft $\underline{K}_1$ ist positiv ($K_{1y} > 0$).



Aufgabe 2-5



Ermitteln Sie für die Kräfte $\underline{K}_1$ bis $\underline{K}_3$, die an den Punkten $\underline{r}_1$ bis $\underline{r}_3$ angreifen:

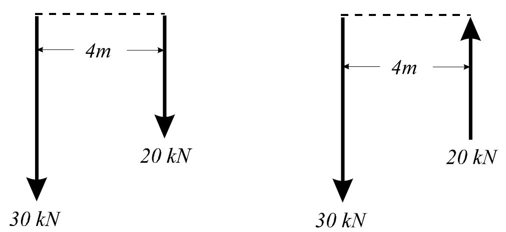
a) Die resultierende Kraft $\underline{R}$
b) Das resultierende Moment $\underline{M}$ der Kräfte $\underline{K}_1$ bis $\underline{K}_3$ bezüglich einer Achse durch den Koordinatenursprung mit dem Richtungsvektor

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{46}}\{3;1;6\}$$

$$\underline{K}_1 = \{-2;-1;2\};\ \underline{K}_2 = \{1;2;1\};\ \underline{K}_3 = \{1;3;1\}\text{kN]}$$

$$\underline{r}_1 = \{-1;-2;3\};\ \underline{r}_2 = \{5;-1;0\};\ \underline{r}_3 = \{1;4;2\}[\text{m}]$$

Aufgabe 2-6

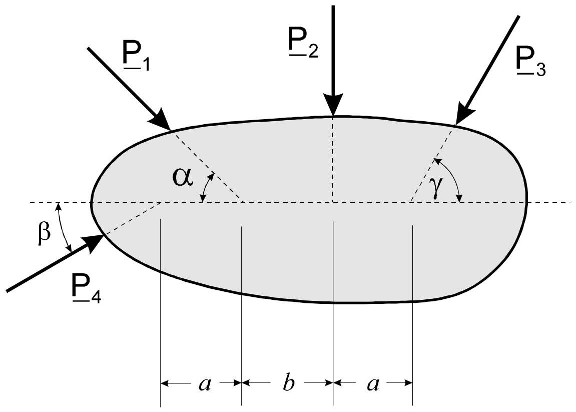


Bestimmen Sie für die skizzierte Kräftegruppe

a) grafisch
b) analytisch

die Größe und Lage der resultierenden Kraft.

Aufgabe 2-7



Für das links dargestellte ebene Kräftesystem, das an einem starren Körper angreift, ist die Resultierende nach Betrag, Lage, Richtung und Orientierung gesucht.

Geg.: P_1 = 30 kN, P_2 = 20 kN, P_3 = 50 kN, P_4 = 40 kN

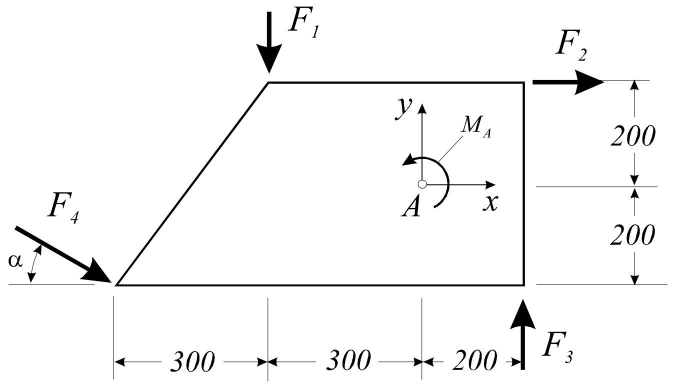
a = 3 m, b = 2 m, α = 45°, β =30 °, γ = 60°.

Aufgabe 2-8

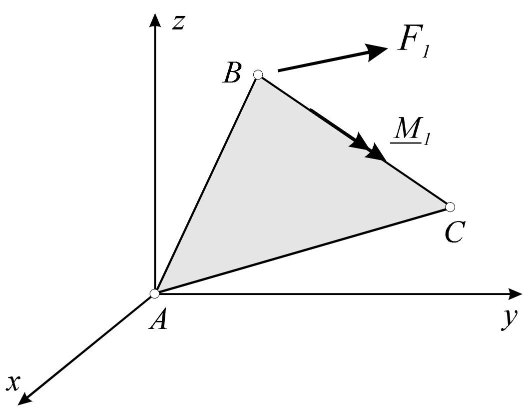
An einer Scheibe greifen vier Einzelkräfte $F_1...F_4$ und ein Moment M_1 an.

1. Wie groß ist die resultierende Kraft R und das resultierende Moment M bezüglich des Punktes A?
2. Existiert eine Gerade *g* in der *x*-*y*-Ebene, so daß das resultierende Moment bezüglich jedes Punktes der Geraden verschwindet?

Geg.: F_1 = 80N; F_2 = 100N; F_3 = 40N; F_4 = 200N; M_1 = 40Nm; α = 30°



Aufgabe 2-9



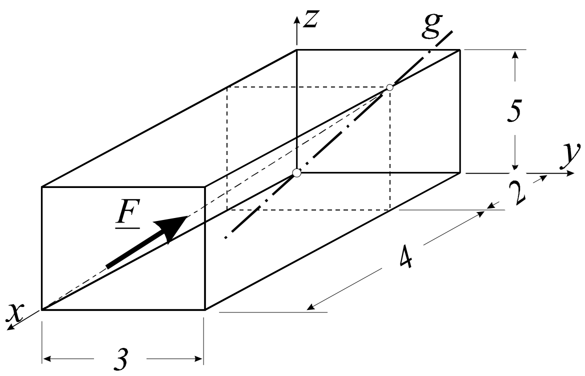
Die Punkte *A*, *B* und *C* bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. An diesem Dreieck greifen wie skizziert die Kraft F_1 und das Moment M_1 an.

1. Reduzieren Sie das System aus Kraft und Moment auf den Punkt *A*.
2. Berechnen Sie das Moment der Kraft $\underline{F}_1$ bezogen auf die *y*-Achse.

$\underline{r}_B = \{1;1;2\}m$; $\underline{r}_C = \{-1;-1;-2\}m$

$\underline{F}_1 = \{-1;0;1\}N$; $|\underline{M}_1| = \sqrt{6}Nm$

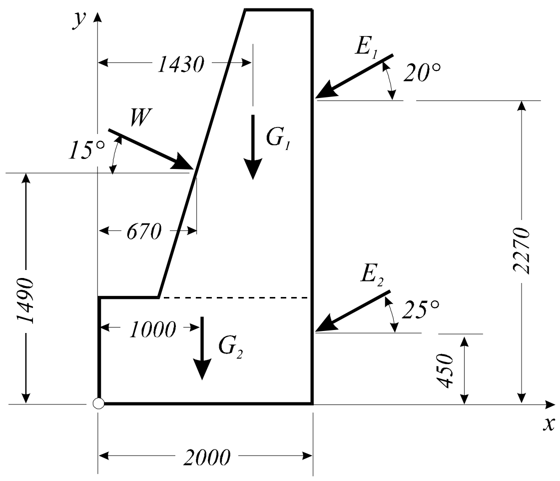
Aufgabe 2-10



Ermitteln Sie das Moment der Kraft $\underline{F}$ bezüglich der Achse g.

Hinweis: Alle Maße in *m*

Aufgabe 2-11



Die skizzierte Belastung auf eine starre Stützmauer ist durch eine mechanisch äquivalente Einzelkraft zu ersetzen.

Bestimmen Sie die resultierende Kraft nach Lage, Richtung und Orientierung.

Geg.:

E_1 = 30 kN; E_2 = 15 kN, W = 16 kN,

G_1 = 77 kN, G_2 = 40 kN

Hinweis: Alle Maße in mm

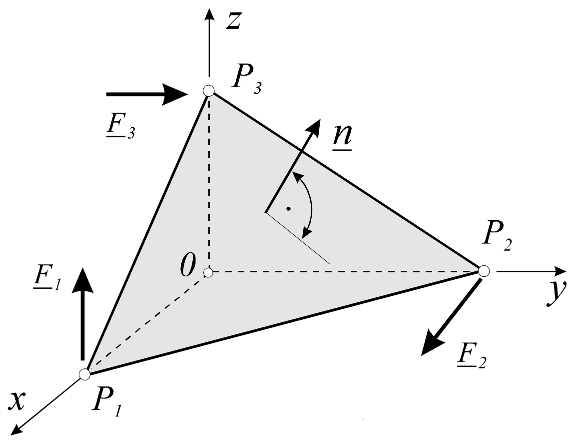
Aufgabe 2-12

In den Punkten P_1, P_2, P_3 greift das räumliche Kräftesystem $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, $\underline{F}_3$ an. Bestimmen Sie:

1. Die Resultierende $\underline{R}$ und ihren Betrag
2. Das auf den Punkt „0“ bezogene Moment $\underline{M}$
3. Die Komponente $\underline{M}_\perp$ des Momentes $\underline{M}$ in Richtung der Flächennormalen $\underline{n}$ der Ebene durch die Punkte P_1, P_2, P_3
4. Die in die Ebene fallende Komponente M_{II} des Momentes $\underline{M}$

$P_1 = (a,0,0)m;\ P_2 = (0,2a,0)m;\ P_3 = (0,0,a)m;$

$\underline{F}_1 = (0,0,F)N;\ \underline{F}_2 = (F,0,0)N;\ \underline{F}_3 = (0,F,0)N;$



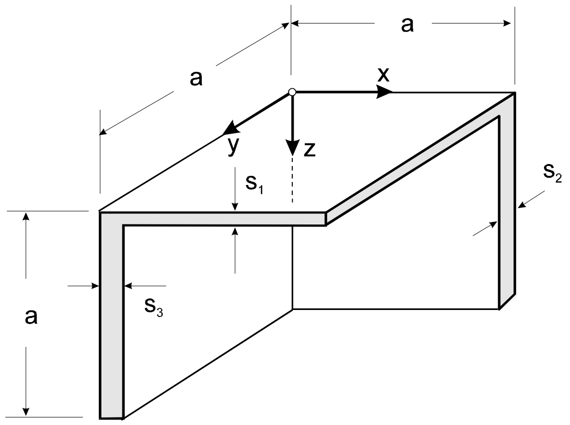
Fragen:

1. Wie leitet sich die Größenart *Kraft* aus den Basisgrößenarten Masse, Länge und Zeit ab?
2. Welche Arten von äußeren Kräften begegnen uns in der klassischen Mechanik? Wie beschreiben wir ihre Verteilungen?
3. Wie unterscheiden sich die Aufgaben, zu einem gegebenen ebenen, zentralen Kräftesystem F_i die Resultierende zu finden bzw. die Kraft, die mit diesen Kräften ein Gleichgewichtssystem bildet?
4. Wieviel skalare Bedingungen umfaßt die Gleichgewichtsbedingung für ebene, zentrale Kräftesysteme?
5. Wieviel Nebenbedingungen können wir vorschreiben bei einem zentralen, ebenen Gleichgewichtssystem, das drei unbekannte Kräfte enthält?
6. Eine Kraft $\underline{F}$ soll in zwei Komponenten, deren positive Richtungen vorgegeben sind, zerlegt werden. Für welche Richtungsbereiche der Kraft $\underline{F}$ erhalten die skalaren Größen der Komponenten positives, für welche negatives Vorzeichen?
7. Wie errechnet man den Betrag der resultierenden Kraft
   a) bei einem orthogonalen
   b) bei einem schiefwinkligen System von zwei Kräften?
8. Welche verschiedene Fassungen können die analytischen Gleichgewichtsbedingungen für zentrale Kräftesysteme annehmen?
9. Wie ist das Moment einer Kraft in bezug auf eine Achse und wie in bezug auf einen Punkt definiert?
10. Wie ändert sich das Moment einer Kraft bei Veränderung der Bezugsachse bzw. des Bezugspunktes?
11. Welches sind die Merkmale eines Kräftepaares?
12. Wie ändert sich das resultierende Moment eines Kräftepaares bei Veränderung des Bezugspunktes bzw. bei Veränderung der Bezugsachse (bei Parallelverschiebung der Achse, bei allgemeinen Änderungen der Achslage)?
13. Welche notwendigen Bedingungen gelten für die Wirkungslinien von zwei bzw. von drei Kräften, die ein Gleichgewichtssystem bilden sollen?
14. Was ergibt die Zusammensetzung einer Einzelkraft F und eines Kräftepaares, dessen resultierendes Moment $\underline{M}$ senkrecht zu $\underline{F}$ ist?
15. Welche Fassungen können wir der Gleichgewichtsbedingung für allgemeine räumliche Kräftesysteme geben bei Anwendung analytischer Methoden?
16. Welche Ausnahmefälle sind bei der analytischen Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen bei ebenen und bei räumlichen allgemeinen Kräftesystemen zu vermeiden? Wie sind diese Ausnahmefälle zu begründen?

17. Wieweit läßt sich ein ebenes allgemeines Kräftesystem reduzieren? Welche Fälle sind zu unterscheiden?
18. Welches sind die einfachsten Kräftesysteme, auf die sich ein allgemeines, räumliches Kräftesystem reduzieren läßt? Welche Sonderfälle gibt es?
19. In wieviel Komponenten mit vorgegebenen Wirkungslinien können wir eine gegebene Kraft eindeutig zerlegen? Welche Ausnahmefälle sind bei der Vorgabe der Wirkungslinien zu vermeiden?
20. Welche Möglichkeiten gibt es, eine gegebene Kraft durch ein äquivalentes System von Kräften und Kräftepaaren zu ersetzen? Was kann dabei jeweils vorgegeben werden?

3 Physikalische und geometrische Größen von Körpern, Flächen und Linien

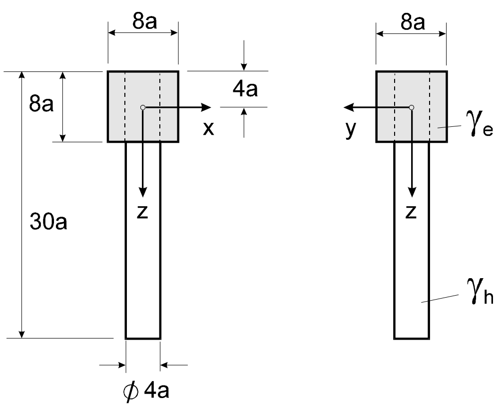
Aufgabe 3-1



Über welchem Punkt P muß ein Kranhaken angebracht werden, damit das nebenstehend skizzierte Bauteil in waagerechter Lage des Oberteils angehoben werden kann?

Geg.: a, $s_1 = \frac{a}{12}$, $s_2 = \frac{a}{8}$, $s_3 = \frac{a}{10}$

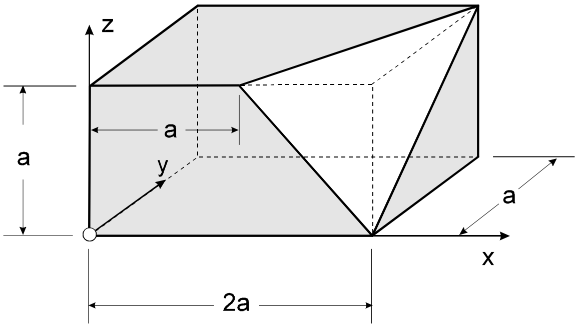
Aufgabe 3-2



Bestimmen Sie für den aus zwei verschiedenen Materialien zusammengesetzten Körper die Koordinaten des Schwerpunktes S.

Geg.: a, $\gamma_e = 10\gamma_h$.

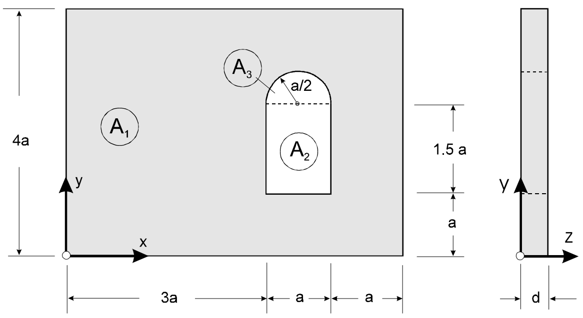
Aufgabe 3-3



Bestimmen Sie für den nebenstehend skizzierten homogenen Körper die Koordinaten des Volumenmittelpunktes S.

Geg.: a

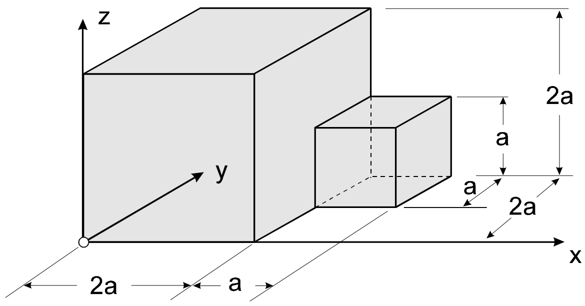
Aufgabe 3-4



Ermitteln Sie für das dargestellte Fertigteil der Dicke *d* aus homogenem Material die Koordinaten des Volumenmittelpunktes *S*.

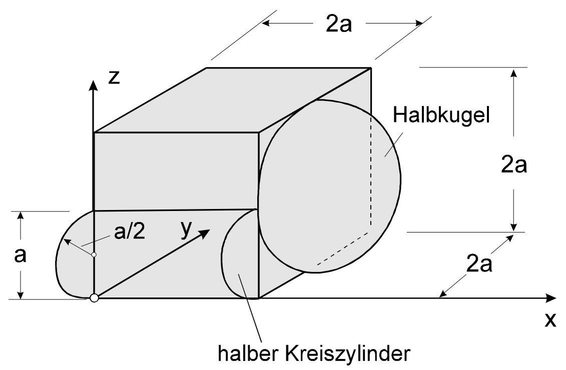
Geg.: *a*, *d*

Aufgabe 3-5



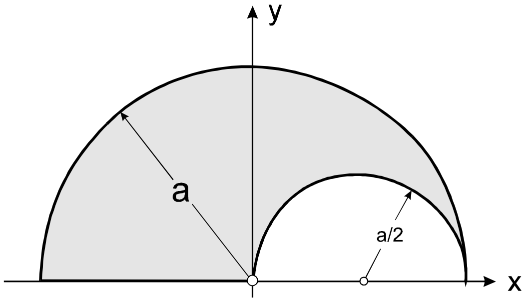
Berechnen Sie für den abgebildeten homogenen Körper die Koordinaten des Volumenmittelpunktes S.

Aufgabe 3-6



Berechnen Sie für den nebenstehenden homogenen Körper die Koordinaten des Volumenmittelpunktes S.

Aufgabe 3-7

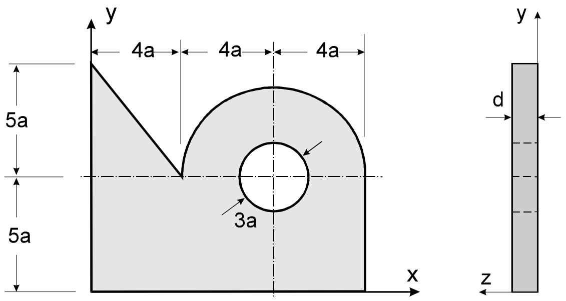


Ermitteln Sie für die nebenstehende Geometrie:

a) die Lage des Flächenmittelpunktes

b) die Koordinaten des Linienmittelpunktes.

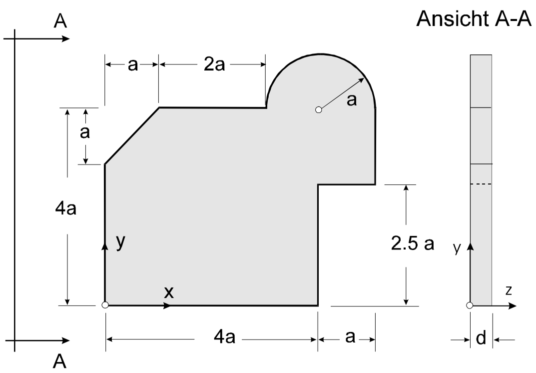
Aufgabe 3-8



Bestimmen Sie für die nebenstehend skizzierte homogene Platte gleichmäßiger Dicke *d* mit kreisförmiger Aussparung die Lage des Volumenmittelpunktes *S*.

Geg.: a, d

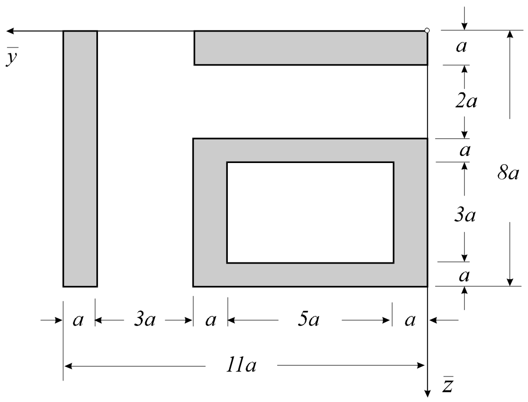
Aufgabe 3-9



Ermitteln Sie für das in dargestellte Fertigteil aus homogenem Material der Dicke d die Koordinaten des Volumenmittelpunktes.

Geg.: a, d

Aufgabe 3-10

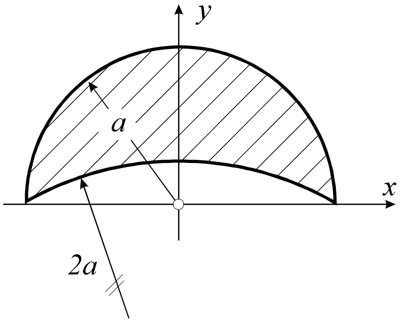


Ermitteln sie für den skizzierten Grundriß (angelegter Bereich) eines Hochhauses

1. den Flächenmittelpunktes,
2. die Richtungen der Hauptträgheitsachsen,
3. die Hauptträgheitsmomente.

Geg.: a

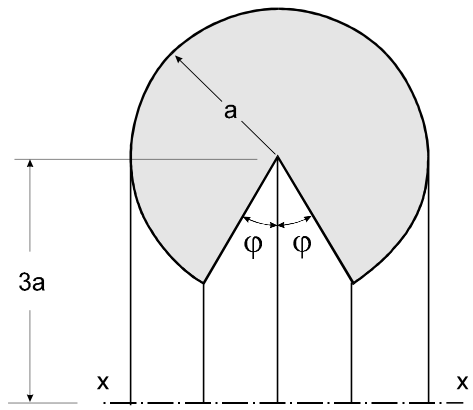
Aufgabe 3-11



Ermitteln Sie die Lage des Flächenmittelpunktes *S* der durch die beiden Kreisbögen mit den Radien *a* und *2a* begrenzten Fläche.

Geg.: a

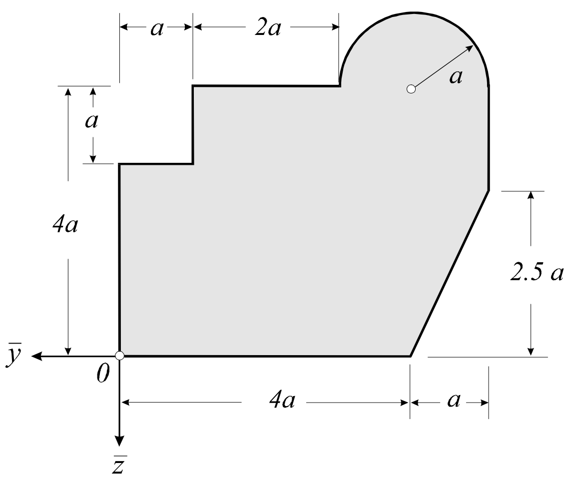
Aufgabe 3-12



Bestimmen Sie die Oberfläche und das Volumen des Körpers, der durch Rotation der nebenstehend skizzierten Fläche um die x...x-Achse entsteht.

Geg.: a, φ = 30°

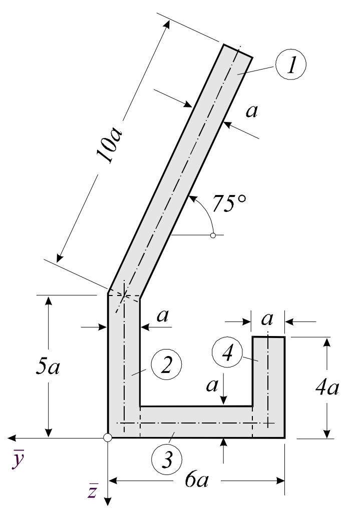
Aufgabe 3-13



Ermitteln Sie für den unten skizzierten Querschnitt eines Fertigteils

1. die Koordinaten des Flächenmittelpunktes S,
2. die Richtungen der Hauptträgheitsachsen und
3. die Hauptträgheitsmomente

Aufgabe 3-14



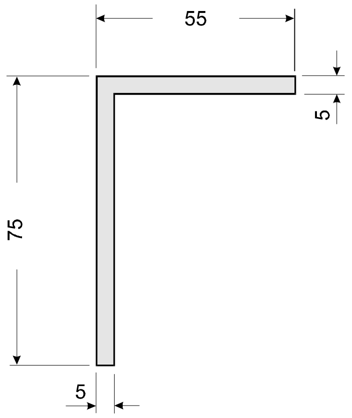
Für den skizzierten Querschnitt sind

1. die Lage des Flächenmittelpunktes,
2. die Lage der Hauptträgheitsachsen und
3. die Hauptträgheitsmomente

zu bestimmen. Die Abweichungen der Einzelflächen vom Rechteckquerschnitt sollen unberücksichtigt bleiben.

Geg.: a

Aufgabe 3-15



Ermitteln Sie für den skizzierten Querschnitt:

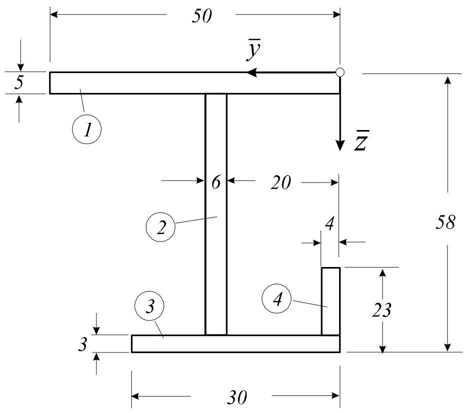
a) die Koordinaten des Flächenmittelpunktes,

b) die Hauptträgheitsmomente,

c) die Richtungen der Hauptträgheitsachsen.

Hinweis: Alle Maße in mm

Aufgabe 3-16



Ermitteln Sie für den skizzierten Querschnitt

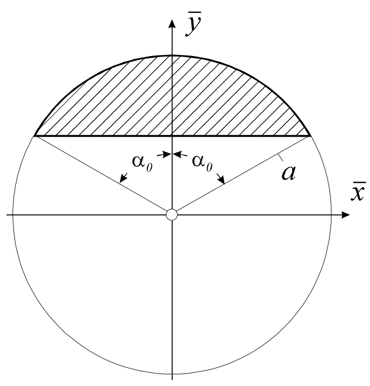
a) die Koordinaten des Flächenmittelpunktes

b) die Hauptträgheitsmomente,

c) die Richtungen der Hauptträgheitsachsen.

Hinweis: Alle Maße in *cm*

Aufgabe 3-17



Ermitteln Sie für den schraffiert dargestellten Kreisabschnitt:

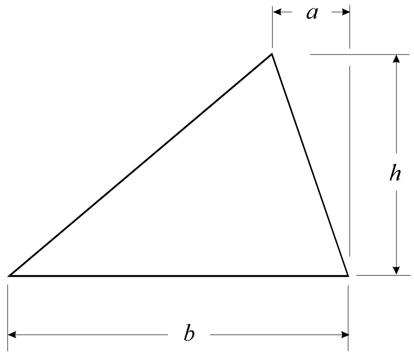
1. die Lage des Flächenmittelpunktes S
2. das axiale Flächenträgheitsmoment $I_{\bar{x}\bar{x}}$

Geg.: a, α_0 .

Hinweis:

$$\int \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi$$

Aufgabe 3-18

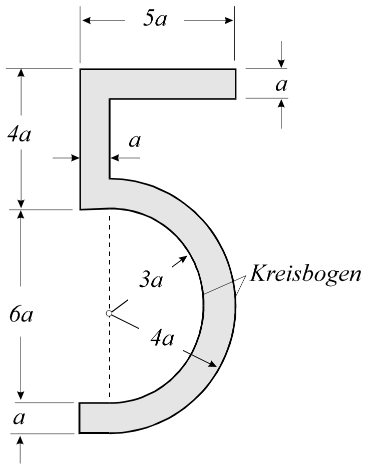


Für den skizzierten Dreiecksquerschnitt sind

1. die Koordinaten des Flächenmittelpunktes S und
2. die Richtung der Hauptträgheitsachsen zu ermitteln.

Geg.: b, h, a

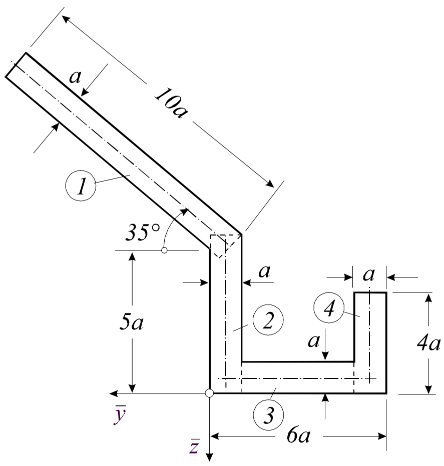
Aufgabe 3-19



Bestimmen Sie für den skizzierten Querschnitt

1. die Koordinaten des Flächenmittelpunktes S,
2. die Hauptträgheitsmomente,
3. die Richtungen der Hauptträgheitsachsen

Aufgabe 3-20



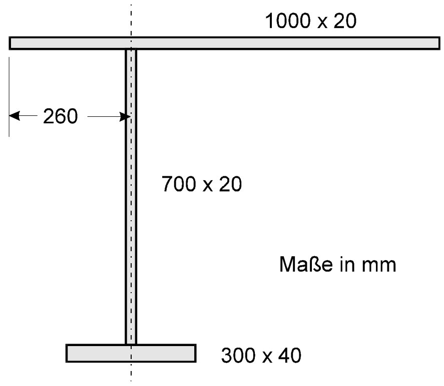
Für den skizzierten Querschnitt sind

1. die Lage des Flächenmittelpunktes,
2. die Lage der Hauptträgheitsachsen und
3. die Hauptträgheitsmomente

zu bestimmen. Die Abweichungen der Einzelflächen vom Rechteckquerschnitt sollen unberücksichtigt bleiben.

Geg.: a

Aufgabe 3-21



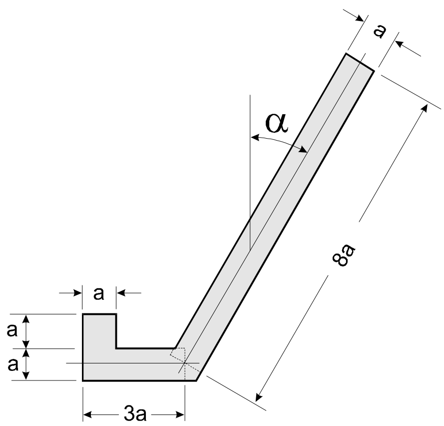
Ermitteln Sie für den skizzierten Querschnitt:

a) die Koordinaten des Flächenmittelpunktes,

b) die Hauptträgheitsmomente,

c) die Richtungen der Hauptträgheitsachsen.

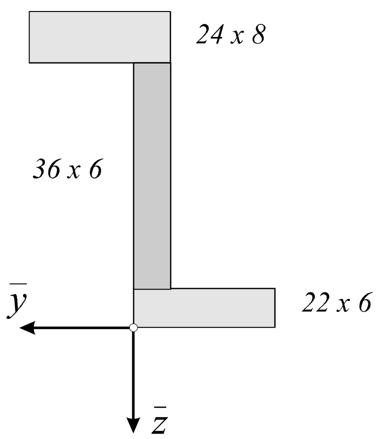
Aufgabe 3-22



Ermitteln Sie für einen Rinnenträger mit nebenstehend skizziertem Querschnitt die Hauptträgheitsmomente und die Lage der Hauptträgheitsachsen. Die Abweichungen der Einzelflächen vom Rechteckquerschnitt sollen unberücksichtigt bleiben.

Geg.: a, $\alpha = 30°$.

Aufgabe 3-23



Ermitteln Sie für den nebenstehend skizzierten Querschnitt:

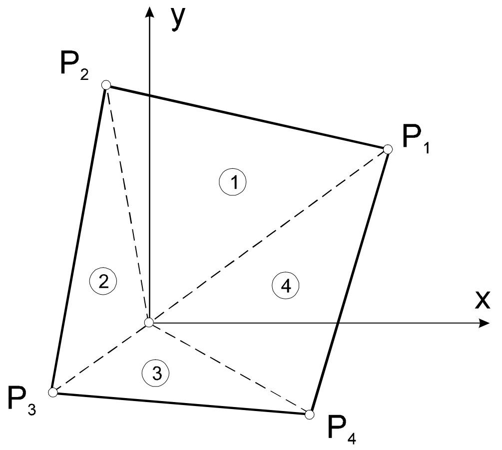
a) die Koordinaten des Flächenmittelpunktes,

b) die Hauptträgheitsmomente,

c) die Richtungen der Hauptträgheitsachsen.

Hinweis: Alle Maße in mm

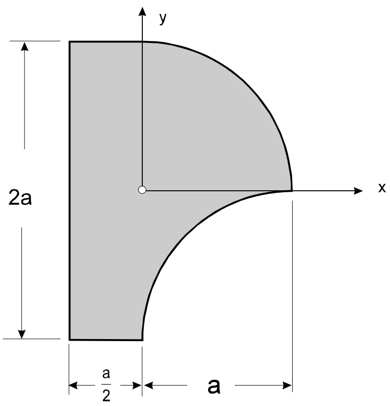
Aufgabe 3-24



Bestimmen Sie für ein beliebig polygonal begrenztes Gebiet, das durch die Koordinaten seiner *n* Eckpunkte gegeben ist, für den eingeschlossenen Querschnitt:

a) die Fläche,
b) die statischen Momente,
c) den Flächenmittelpunkt,
d) die Flächenträgheitsmomente.

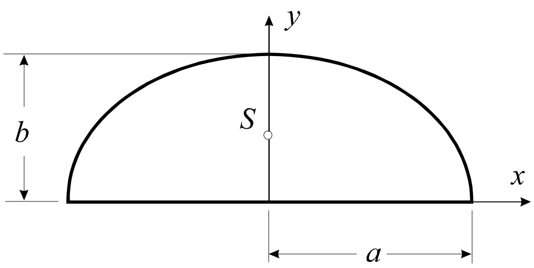
Aufgabe 3-25



Ermitteln Sie für den links skizzierten Querschnitt die Hauptträgheitsmomente und die Lage der Hauptträgheitsachsen.

Geg.: a

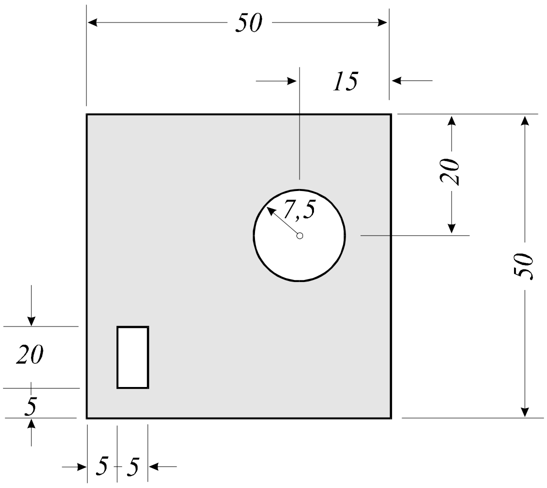
Aufgabe 3-26



Ermitteln Sie die Lage des Flächenmittelpunktes *S* der skizzierten Halbellipse.

Geg.: a, b

Aufgabe 3-27



Ermitteln Sie für das skizzierte homogene Fertigteil mit konstanter Dicke *d*. die Lage des Volumenmittelpunktes *S*.

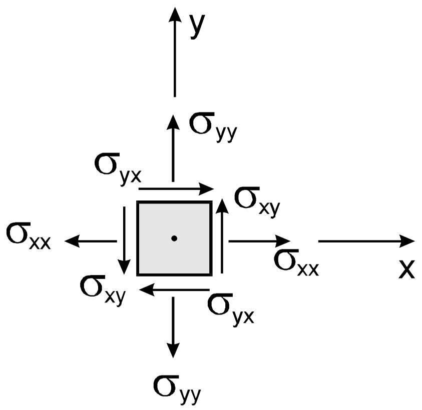
Hinweis: Alle Maße in cm.

Fragen:

1. Unter welcher Bedingung fallen Massen-Mittelpunkt und Schwerpunkt eines Körpers zusammen?
2. Unter welcher Bedingung fallen Massen-Mittelpunkt und Volumen-Mittelpunkt eines Körpers zusammen?
3. Welcher Unterschied besteht zwischen der Lage des Massen-Mittelpunktes (Volumen-Mittelpunktes) bei einem starren und bei einem deformierbaren Körper?
4. Was gilt für die Definition des Schwerpunktes in einem inhomogenen Schwerefeld?
5. Was gilt für die Momente 1. Grades in einem Zentralachsensystem?
6. Wie finden wir den Mittelpunkt (Schwerpunkt) zusammengesetzter Körper (Flächen, Linien)? Welche Beziehung gilt insbesondere für den Mittelpunkt (Schwerpunkt) zweier Teilkörper (Teilflächen, Teillinien)?
7. Welche einfache Beziehung gilt für den Mittelpunkt (Schwerpunkt) eines Polygonzuges? Wie ändern sich die Flächenmomente 2. Grades bei einer Drehung des Bezugssystems?
8. Was sind die Hauptachsen einer Fläche? Welche Bedeutung haben sie?
9. Wie verändern sich die Flächenmomente 2. Grades bei einer Parallelverschiebung des Bezugssystems
   a) ausgehend von einer Mittelpunktslage?
   b) ausgehend von einer beliebigen Lage?
10. Wann ändern sich die Hauptachsen bei einer Parallelverschiebung des Bezugssystems und wann nicht?
11. Wie können wir die Flächenmomente 2. Grades numerisch berechnen?

4 Spannungen

Aufgabe 4-1



$$\sigma_{xx} = -3{,}0 N/cm^2$$
$$\sigma_{yy} = 4{,}5 N/cm^2$$
$$\sigma_{xy} = 2{,}0 N/cm^2$$

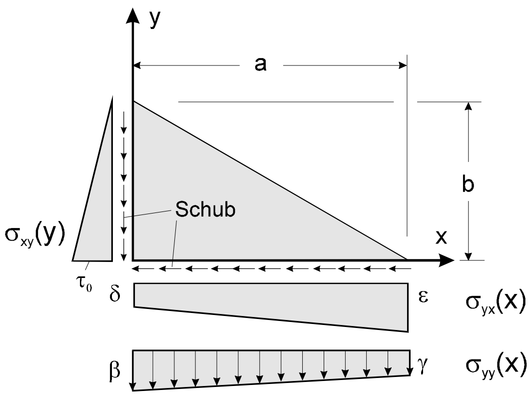
Für einen Punkt in einem homogenen Material ist der links skizzierte Spannungszustand gegeben. Ermitteln Sie mit Hilfe des Mohr*schen* Spannungskreises:

a) die Hauptnormalspannungen und deren Richtungen,

b) die Hauptschubspannungen und deren Richtungen sowie die den Hauptschubspannungen zugeordneten Normalspannungen,

c) die Normal- und Schubspannungen auf einer unter α = -40° geneigten Fläche.

Aufgabe 4-2



Eine Scheibe der Dicke h ist bei x = 0 durch linear verteilte Schubspannungen und bei y = 0 durch linear verteilte Normal- und Schubspannungen belastet. Ermitteln Sie die Randwerte $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ so, daß Gleichgewicht herrscht.

Geg.: a, b, h, τ_0.

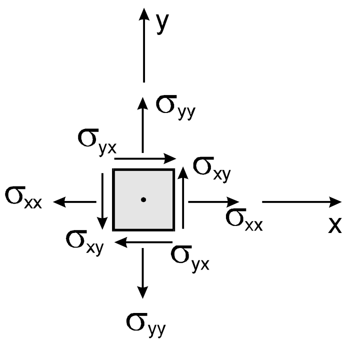
<u>Aufgabe 4-3</u>

Für einen Punkt in einem homogenen Material sind zwei Spannungszustände aus <u>verschiedenen</u> Lasteinflüssen gegeben.

a) Wie groß sind die Hauptnormal- und Hauptschubspannungen des resultierenden Spannungszustandes?

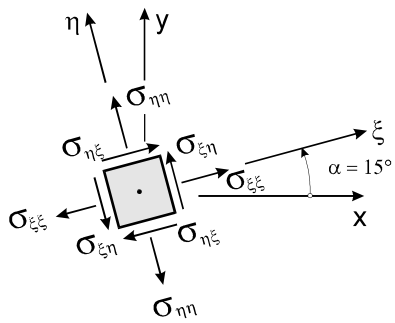
b) Welche Richtungen haben sie?

c) Wie groß sind die Normal- und Schubspannungen auf einer unter 45° geneigten Fläche für den <u>resultierenden</u> Spannungszustand?



$$\sigma_{xx} = -2{,}0 N/cm^2$$
$$\sigma_{yy} = 4{,}0 N/cm^2$$
$$\sigma_{xy} = 1{,}0 N/cm^2$$

Spannungszustand I



$$\sigma_{\xi\xi} = -5{,}0 N/cm^2$$
$$\sigma_{\eta\eta} = 2{,}0 N/cm^2$$
$$\sigma_{\xi\eta} = -3{,}0 N/cm^2$$

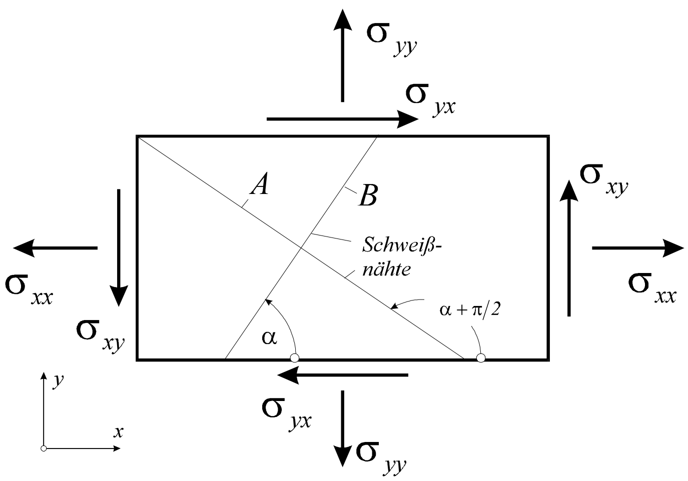
Spannungszustand II

Aufgabe 4-4

Gegeben ist ein rechtwinkliger Ausschnitt einer zweifach geschweißten ebenen Platte. Die Spannungen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ sind bekannt. Gesucht werden:

1. Die Spannungen in den senkrecht aufeinander stehenden Schweißnähten *A* und *B*
2. Welche Bedingung muß für die Lage der Schweißnähte gelten, damit sie schubspannungsfrei sind und folglich nur Normalspannungen übertragen?

Geg.: $\sigma_{xx} = 40kN / cm^2, \sigma_{yy} = 30kN / cm^2, \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 8kN / cm^2; \alpha = 35°$



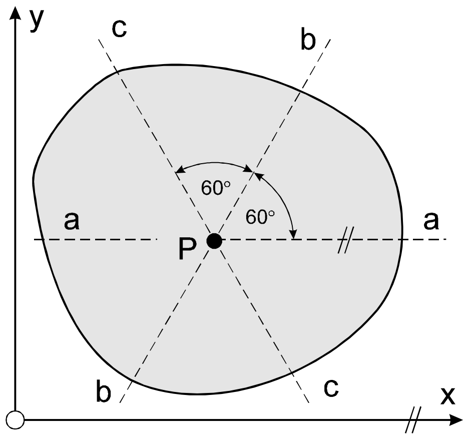
Fragen

1. Für wie viele Schnittrichtungen durch einen Punkt müssen wir den zugehörigen Spannungsvektor kennen, damit wir auch für jede beliebige andere Schnittrichtung durch diesen Punkt den zugehörigen Spannungsvektor angeben können?
2. Warum benötigen wir nur sechs (statt neun) Zahlenwerte zur Festlegung des Spannungszustandes in einem Punkt?
3. Wodurch ist ein ebener Spannungszustand gekennzeichnet und wie viele Zahlenangaben sind erforderlich, um ihn zu beschreiben?
4. Wie ändern sich die Zahlenwerte des Spannungstensors eines ebenen Spannungszustandes mit der Drehung der Schnittrichtung?
5. Was kennzeichnet die Hauptachsen des Spannungszustandes?
6. Was sind die Haupt-Normalspannungen?
7. Wie sind die Haupt-Schubspannungen definiert?
8. Welche Bedeutung haben die Invarianten des Spannungszustandes? Wie viele gibt es? Wie sind sie definiert?
9. Welche Beziehung besteht zwischen der mittleren Normalspannung und den Invanrianten des Spannungszustandes?

1. Jedem Punkt einer (gedachten) Schnittfläche können wir einen Spannungsvektor zuordnen. Wie erfolgt die Zerlegung dieses Spannungsvektors in Normal- und Schubspannung?
2. Wie kann man sich etwa am Beispiel einfacher Erfahrungstatsachen klarmachen, daß der Spannungsvektor nicht nur von dem betrachteten Körperpunkt, sondern auch von der Schnittrichtung in diesem Punkt abhängt?
3. Was besagt der Satz von der Gleichheit der einander zugeordneten Schubspannungen?
4. Wieviel Zahlenangaben benötigen wir zur Festlegung des Spannungszustandes in einem Körperpunkt? Wie bezeichnet man die physikalische Größe, die den Spannungszustand kennzeichnet? Welche Eigenschaften hat sie?

5 Verschiebungen und Verzerrungen

Aufgabe 5-1



Aus einer Dehnungsmessung in der Umgebung eines Punktes P wurden in den Richtungen a-a, b-b und c-c die folgenden Dehnungen gemessen.

$_{aa}$ $_{bb}$ $_{cc}$ $\in R$

Ermitteln Sie:

a) die Koordinaten $_{xx}$ $_{yy}$ $_{xy}$ des ebenen Verzerrungstensors,

b) die Hauptdehnungen und deren Richtungen,

c) die linearisierte Flächendehnung

d) die Hauptgleitungen und deren Richtungen,

$\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\varepsilon_0 = 5\%$.

Aufgabe 5-2

In einem Körper ist das Verschiebungsfeld

$$\underline{w}(x,y,z) = a(2x^2 + y^2)\underline{e}_x + a(2x^2 - 3y^2)\underline{e}_y + b\underline{e}_z$$

(a, b Konstanten) vorgegeben. Vor der Deformation befand sich die linke untere Ecke eines quaderförmigen Elementes mit den Kantenlängen dx, dy, dz im Punkt P(2; 1; 0). Bestimmen Sie für den Zustand nach der Deformation:

a) die neue Lage des Punktes P,

b) die neuen Längen der einzelnen Kanten,

c) die Winkellagen der neuen Kanten,

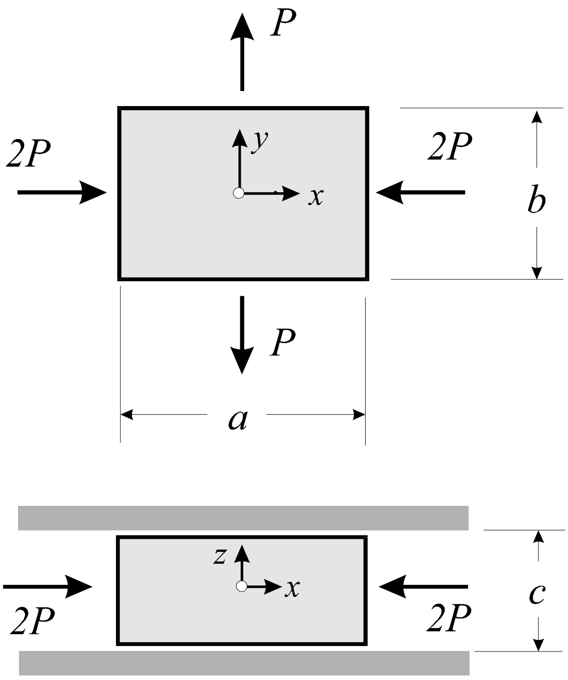
d) den mittleren Drehungswinkel des Elementes.

Fragen

1. Wie sind Dehnungen und Gleitungen allgemein definiert?
2. Wie sind die Verzerrungen eines Körperelementes definiert?
3. Wieviel Zahlenangaben benötigen wir zur Festlegung des Verzerrungszustandes eines Körperelementes?
4. Wie bezeichnet man die physikalische Größe, die den Verzerrungszustand kennzeichnet? Welche Eigenschaften hat sie?
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Verzerrungen eines Körperelementes und dem Verschiebungsfeld?
6. Wie können wir die Verzerrungen in Volumen- und Gestaltänderungen aufteilen?
7. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Starrkörper-Verschiebungen (Translation und Rotation) und dem Verschiebungsfeld?

6 Materialgesetz, Hooke

Aufgabe 6-1



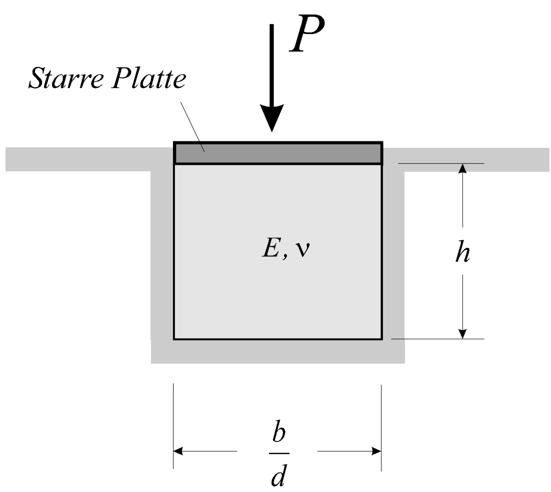
Ein quaderförmiger Körper mit den Materialkonstanten E, ν, α_t liegt zunächst spannungsfrei zwischen zwei als starr anzunehmenden Ebenen. Dann wird der Körper um ΔT erwärmt und in der skizzierten Weise durch Druck- und Zugkräfte belastet. Bestimmen Sie

a) den Verzerrungszustand des Körpers und die Kontaktkraft D zwischen dem Körper und den starren Ebenen,

b) die Spannungen und Verzerrungen in einem um den Winkel $\varphi = \pi/6$ um die z-Achse gedrehten Koordinatensystem.

c) Geg.: $P, \Delta T, a, b, c, \alpha_t, E, \nu$.

Aufgabe 6-2



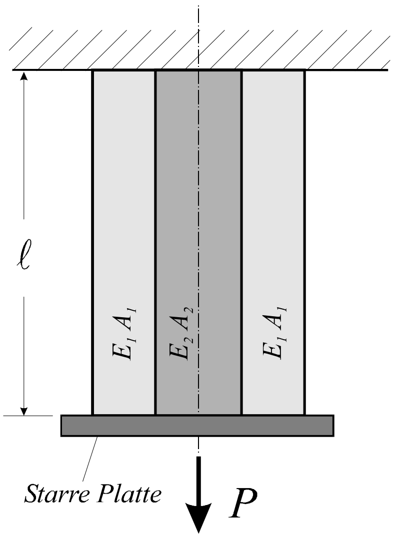
Ein homogener elastischer Körper paßt genau in einen Hohlraum, dessen Wände als vollkommen starr anzusehen sind. Ermitteln Sie:

a) die auf die Oberflächen wirkenden Spannungen.

b) Um welchen Betrag verringert sich die Quaderhöhe h, wenn der Quader mittels einer starren Platte durch die Kraft P zusammengedrückt wird?

Geg.: b = d = 2 cm, h = 2,5 cm, P = 1,5 kN,
E = 200 kN/cm^2, $\nu = 0{,}3$.

Aufgabe 6-3



Ein aus zwei Materialien (E_1, E_2) zusammengesetzter Stab ist gemäß Skizze durch eine axial angreifende Kraft P belastet. Bestimmen Sie:

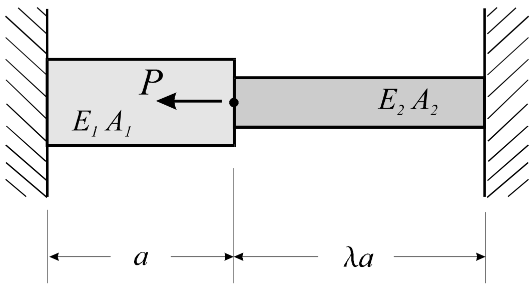
a) die Spannungen in den einzelnen Stabteilen

b) die Verlängerung des Gesamtstabes.

Geg.: E_1, A_1, E_2, A_2, P, ℓ .

Hinweis: Die Stabteile sind so miteinander verbunden, daß sie gleiche Dehnungen haben.

Aufgabe 6-4



Der beidseitig eingespannte Stab wird durch die Kraft P belastet.

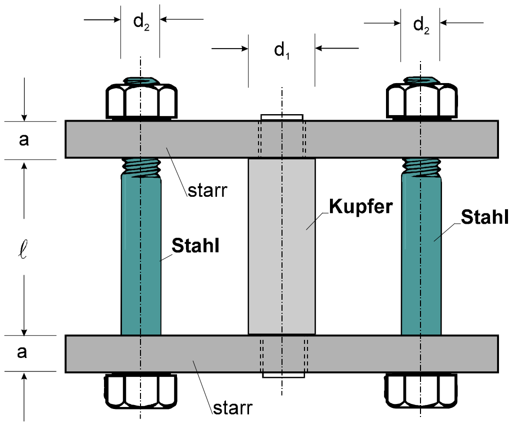
Bestimmen Sie

a) die Normalkraftverteilung und

b) die Verschiebung des Kraftangriffspunktes.

Geg.: E_1, A_1, E_2, A_2, a,   , P.

Aufgabe 6-5



Die skizzierte Bolzenverbindung wird um ΔT = 80°C erwärmt.

a) Welche Spannungen entstehen in den einzelnen Stäben, wenn das System vor Beaufschlagung der Temperaturdifferenz ΔT spannungsfrei war?

b) Um welchen Betrag entfernen sich die beiden als starr anzunehmenden Kopfplatten?

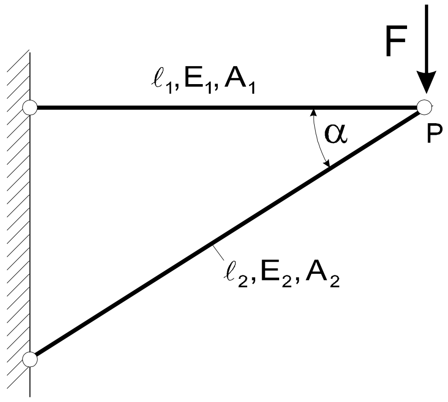
Geg.: d_1 = 50 mm, d_2 = 15 mm,

ℓ = 6a = 1,0 m, $E_{st} = 2{,}1 \cdot 10^7\ N/cm^2$,

$E_K = 1{,}1 \cdot 10^7\ N/cm^2$

$\alpha_{St} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$, $\alpha_K = 1{,}65 \cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$.

Aufgabe 6-6



Das skizzierte statisch bestimmte Stabwerk wird durch eine Einzellast F belastet. Bestimmen Sie unter der Voraussetzung kleiner Verformungen den Spannungs- u. Verformungszustand des Tragwerks.

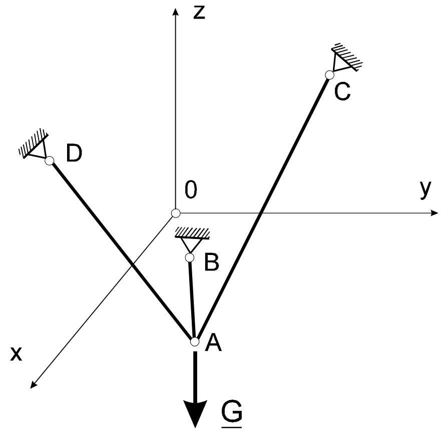
Geg.: $\ell_1, \ell_2, A_1, A_2, E_1, E_2, F$.

Fragen:

1. Was charakterisiert einen elastischen Werkstoff
2. Was bedeutet Isotropie, was Homogenität des Werkstoffes?
3. Unter welchen Voraussetzungen gilt das verallgemeinerte Hooke*sche* Gesetz? Wie leiten wir es aus einigen wenigen Versuchen ab?
4. Wieviel Material-Konstanten gehen in das verallgemeinerte Hooke*sche* Gesetz ein? Welche? Wieviel davon sind unabhängig voneinander?
5. Was bedeuten geometrische und physikalische Linearität?
6. Welche Eigenschaften kennzeichnen einen Körper als elastisch?
7. Wie lautet das Formänderungsgesetz des isotropen, linear-elastischen Körpers?
8. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Werkstoffkonstanten E, G und ν des isotropen, linear-elastischen Körpers?
9. Welche Form nimmt das Hooke*sche* Gesetz bei Aufspaltung in Volumen- und Gestaltänderungen an?

7 Statik des starren Körpers

Aufgabe 7-1

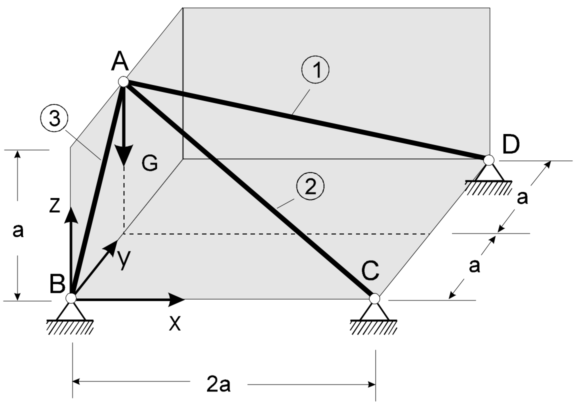


Ein Gewicht G = {0; 0; -G} [N] hängt im Punkt A(1;1;-3) [m] an drei Seilen AB, AC und AD. Die Koordinaten der Befestigungspunkte der Seile sind:

B (3 ; 2 ; 1) [m]
C (-1; 3 ; 2) [m]
D (-1 ; -3 ; 1) [m].

Berechnen Sie die Seilkräfte.

Aufgabe 7-2

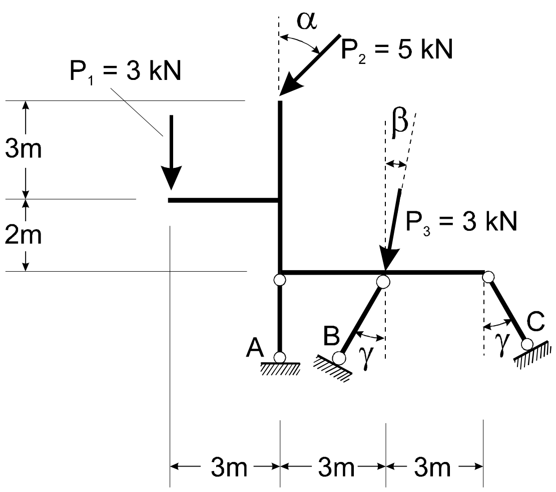


Am Knoten A des nebenstehend skizzierten Systems hängt eine Last G.

Berechnen Sie sämtliche Stabkräfte, und unterscheiden Sie dabei zwischen Zug- und Druckbelastung.

Geg.: a, G

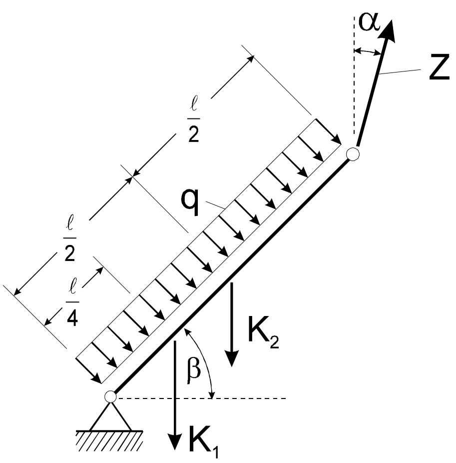
Aufgabe 7-3



Bestimmen Sie für das skizzierte Kräftesystem die Auflagerkräfte A, B und C.

Geg.:

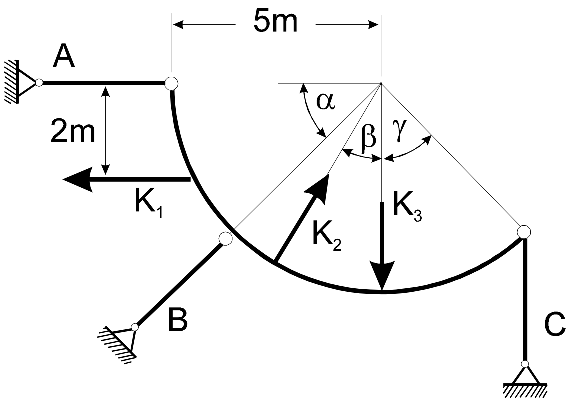
Aufgabe 7-4



Wie groß muß die Zugkraft Z sein, damit sich das nebenstehende System im Gleichgewicht befindet?

Geg.: ℓ = 3 m ; q = 20 kN/m, K_1 = 10 kN; K_2 = 60 kN , $\alpha = \beta = 30°$.

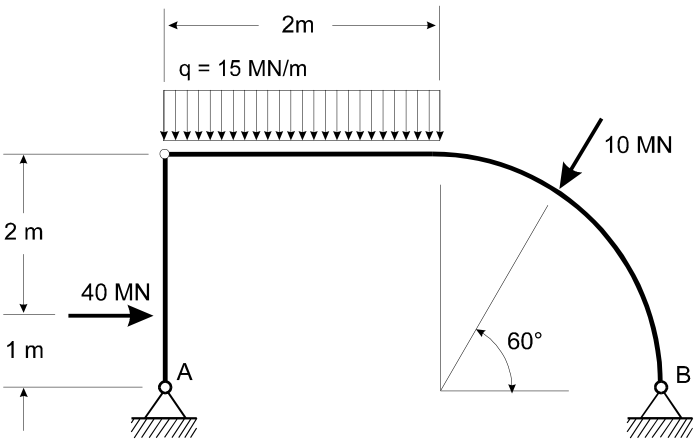
Aufgabe 7-5



Ein starrer kreisförmiger Stab (Durchmesser 10 m) stützt sich gemäß nebenstehender Skizze auf die Stäbe A, B, C ab. Bestimmen Sie sämtliche Stabkräfte infolge der gegeben Belastung K_1, K_2 und K_3.

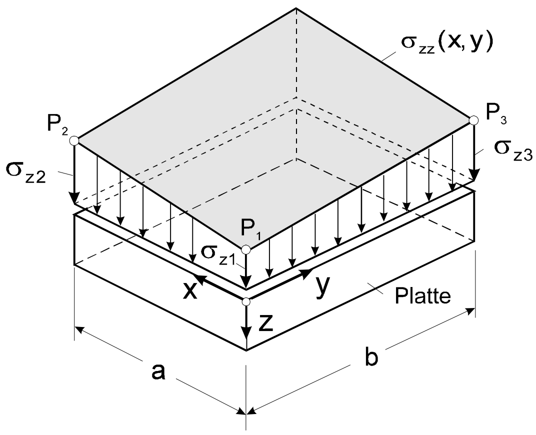
Geg.: K_1 = 100 kN, K_2 = 400 kN
K_3 = 300 kN, r = 5.0 m, h = 2.0 m,
$\alpha = 45°, \beta = 30°, \gamma = 45°$

Aufgabe 7-6



Ermitteln Sie die Auflagerkräfte für das nebenstehend skizzierte System.

Aufgabe 7-7

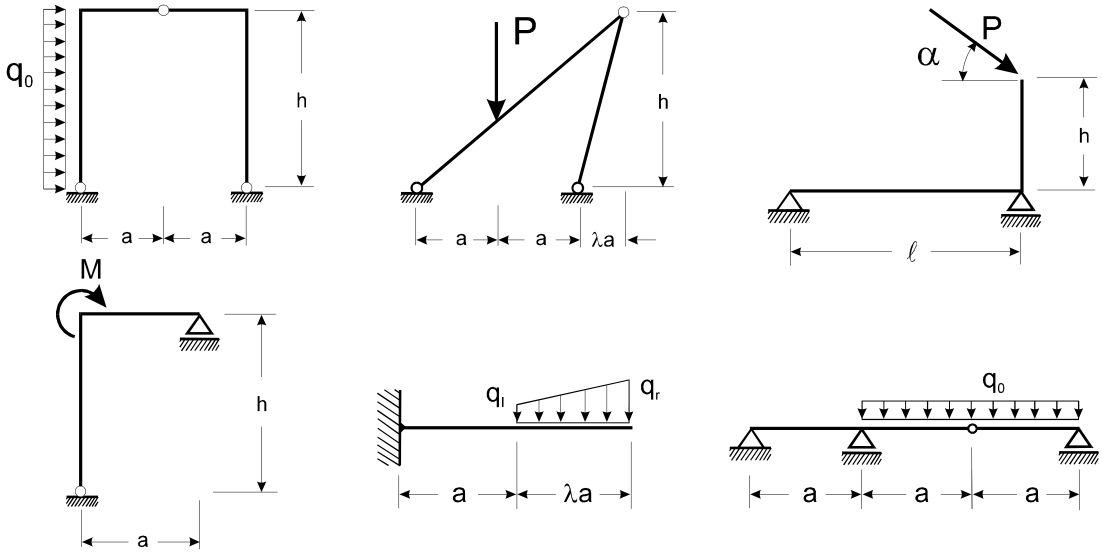


Eine starre rechteckige Platte mit den Abmessungen a und b wird in z-Richtung durch eine ebene Druckspannungsverteilung $s_{zz}(x,y)$ beansprucht. Bestimmen Sie die resultierende Druckkraft R nach Lage und Richtung.

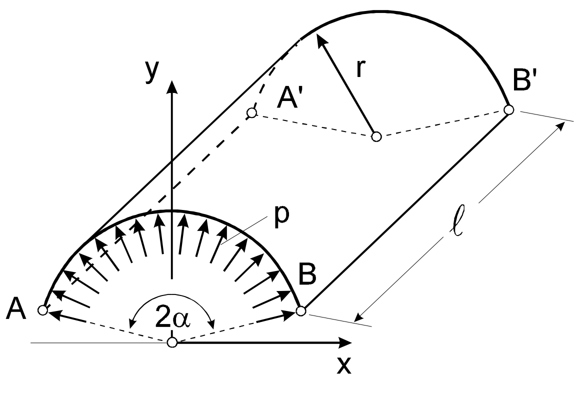
Geg.: a, b, $\sigma_{z1}, \sigma_{z2}, \sigma_{z3}$

Aufgabe 7-8

Bestimmen Sie für die skizzierten Systeme die Auflagerreaktionen, die Gelenkreaktionen und die Schnittlasten mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen.



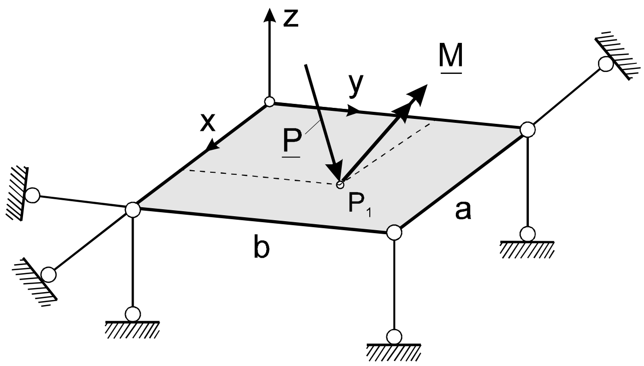
Aufgabe 7-9



Ermitteln Sie die resultierende Kraft R aller auf den nebenstehend abgebildeten Teil einer Zylinderfläche wirkenden konstanten Druckkräfte p. Der Druck p wirkt normal auf jedes Flächenelement.

Zeigen Sie, daß die Rechnung bei der durch den Druck belasteten Projektionsfläche A A' B B' der Zylinderfläche denselben Wert für die Resultierende R liefert. Geg.: p, ℓ, r, α.

Aufgabe 7-10

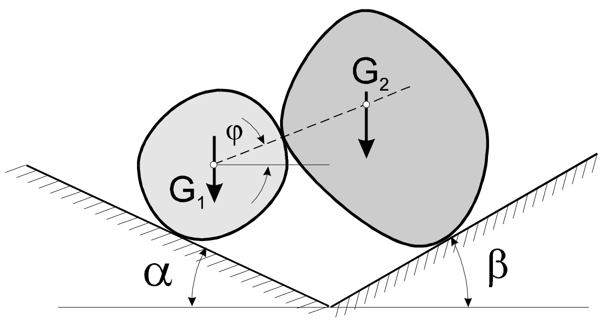


Die nebenstehend skizzierte starre Platte mit den Abmessungen a und b wird am Punkte $P_1(1,2,0)$ durch eine Kraft $\underline{P}$ und ein Moment $\underline{M}$ belastet. Ermitteln Sie die Stabkräfte in den Pendelstäben so, daß Gleichgewicht herrscht.

Geg.: a = 2m, b = 3m, $\underline{P}$ = {2;3;-3} kN

$\underline{M}$ = {-2;3;4} kNm.

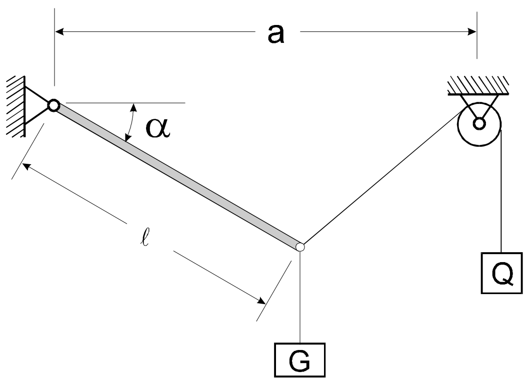
Aufgabe 7-11



Bestimmen Sie den Winkel φ , den die Verbindungslinie der beiden Walzenmittelpunkte einnimmt, wenn sich das System im Gleichgewicht befindet. Die Reibungskräfte in den Kontaktflächen sind dabei zu vernachlässigen.

Geg.: α, β, G_1, G_2

Aufgabe 7-12



Ein masseloser Stab der Länge ℓ ist an einem Ende drehbar gelagert und trägt am anderen Ende das Gewicht G. Er wird mit Hilfe eines ebenfalls masselosen Seiles, das durch das Gewicht Q über eine lose Rolle gespannt ist, aus der ursprünglich senkrechten Lage ausgelängt. Bestimmen Sie für die sich einstellende Gleichgewichtslage den Winkel α und die Stabkraft. Geg.: Q = G/2, a = 3 ℓ .

Fragen

1. Wie sind kinematische Bindungen und Reaktionen miteinander verknüpft?
2. Welche notwendige Bedingung gilt für die Anzahl der kinematischen Bindungen, wenn der Körper unverschiebbar gelagert sein soll bei räumlichen bzw. ebenen Systemen?
3. Wann ist eine Bindung bzw. eine Reaktion von den übrigen abhängig?
4. Wann ist ein Auflagersystem vollständig? Wann ist es kinematisch und statisch bestimmt?
5. Wie wirkt es sich (mathematisch betrachtet) aus, wenn ein Auflagersystem statisch unbestimmt ist?
6. Was ergibt sich (mathematisch betrachtet), wenn ein Auflagersystem kinematisch unbestimmt ist?
7. Wie ist der Freiheitsgrad eines Systems definiert?
8. Welcher notwendigen Bedingung muß die Anzahl der Auflager- und Verbindungsreaktionen genügen, damit ein System von Körpern kinematisch bestimmt sein kann?
9. Wann ist das System der Bindungen vollständig?
10. Wann ist ein System von Körpern kinematisch und statisch bestimmt?
11. Wie lauten die Bildungsgesetze für kinematisch und statisch bestimmte Systeme von Körpern? Welche Bedeutung haben sie?

Anhang Tabellen

Ermittlung des Volumenmittelpunktes

Volumen	V_i	x_{Si}	y_{Si}	z_{Si}	$x_{Si}\,V_i$	$y_{Si}\,V_i$	$z_{Si}\,V_i$
1							
2							
Σ							

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{Si}\,V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} =$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{Si}\,V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} =$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{Si}\,V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} =$$

$$\underline{r}_S = \{x_S\ , y_S\ , z_S\} = \{\qquad ; \qquad ; \qquad\} \quad [\qquad]$$

Ermittlung des Flächenmittelpunktes einer ebenen Fläche

Linie	A_i	x_{Si}	y_{Si}	$x_{Si}\ A_i$	$y_{Si}\ A_i$
1					
2					
3					
Σ					

$$x_S = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{Sj}\, A_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j} =$$

$$y_S = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{Sj}\, A_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j} =$$

$$\underline{r}_S = \{x_S, y_S\} = \{ \qquad ; \qquad ; \qquad \} \quad [\qquad]$$

Ermittlung des Linienmittelpunktes einer ebenen Linie

Linie	**L_i**	**x_{Si}**	**y_{Si}**	**$x_{Si}\,L_i$**	**$y_{Si}\,L_i$**
1					
2					
3					
Σ					

$$x_S = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{Sj}\, L_j}{\sum_{j=1}^{n} L_j} =$$

$$y_S = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{Sj}\, L_j}{\sum_{j=1}^{n} L_j} =$$

$$\underline{r}_S = \{x_S\, , y_S\} = \{ \qquad ; \qquad ; \qquad \} \quad [\qquad]$$

Flächenträgheitsmomente, Deviationsmoment

$$I_{\bar{y}\bar{y}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{z}_{Si}^{2} A_i + I_{yy,i}\right],\quad I_{\bar{z}\bar{z}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{y}_{Si}^{2} A_i + I_{zz,i}\right],\quad I_{\bar{y}\bar{z}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{y}_{Si}\,\bar{z}_{Si} A_i + I_{yz,i}\right]$$

Profil	A_i (LE)^2	$\bar{y}_{S,i}$ (LE)	$\bar{y}_{S,i} A_i$ (LE)^3	$\bar{y}_{S,i}^2 A_i$ (LE)^4	$I_{zz,i}$ (LE)^4
1					
2					
3					
4					
5					
$\sum$					
				$I_{\bar{z}\bar{z}} =$	

Profil	A_i (LE)^2	$\bar{z}_{S,i}$ (LE)	$\bar{z}_{S,i} A_i$ (LE)^3	$\bar{z}_{S,i}^2 A_i$ (LE)^4	$I_{yy,i}$ (LE)^4
1					
2					
3					
4					
5					
$\sum$					
				$I_{\bar{y}\bar{y}} =$	

Profil	A_i (LE)^2	$\bar{y}_{S,i}$ (LE)	$\bar{z}_{S,i}$ (LE)	$\bar{y}_{S,i}\,\bar{z}_{S,i} A_i$ (LE)^4	$I_{yz,i}$ (LE)^4
1					
2					
3					
4					
5					
$\sum$					
				$I_{\bar{y}\bar{z}} =$	

LE: Längeneinheiten

Hauptachsentransformation ebener Flächen

Koordinaten des Flächenmittelpunktes

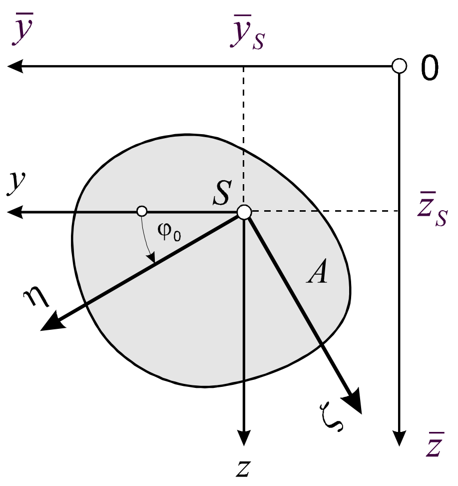
$$\bar{y}_S = \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{Sj} A_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; \quad \bar{z}_S = \frac{\sum_{j=1}^{n} \bar{z}_{Sj} A_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j}$$

Trägheitsmomente und Deviationsmoment bzgl. der Achsen durch den Flächenmittelpunkte S des Gesamtquerschnitts parallel zu $\bar{x}, \bar{y}$.

$$I_{yy} = I_{\bar{y}\bar{y}} - A\,\bar{z}_S^2$$
$$I_{zz} = I_{\bar{z}\bar{z}} - A\,\bar{y}_S^2$$
$$I_{yz} = I_{\bar{y}\bar{z}} - A\,\bar{y}_S\,\bar{z}_S$$

Richtung der Hauptträgheitsachsen

$$\tan 2j_0 = \tan(2j_0 + p) = \frac{2I_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}}, \qquad \rightarrow j_0 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2I_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}}$$



Hauptträgheitsmomente

$$I_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) + \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\cos 2\varphi_0 - I_{yz}\sin 2\varphi_0$$
$$I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) - \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\cos 2\varphi_0 + I_{yz}\sin 2\varphi_0$$
$$I_{\eta\zeta} = \frac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\sin 2\varphi_0 + I_{yz}\cos 2\varphi_0 \overset{!}{=} 0$$

Hinweis: Die letzte Gleichung dient der Kontrolle

1.	$y' + \lambda y = a + bx + cx^2$	$y = Ce^{-\lambda x} + \frac{a}{\lambda} - \frac{b}{\lambda^2} + 2\frac{c}{\lambda^3} + (\frac{b}{\lambda} - 2\frac{c}{\lambda^2})x + \frac{c}{\lambda}x^2$
2.	$y' + \lambda y = a\cos\omega x + b\sin\omega x$	$y = Ce^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2}[(\lambda a - \omega b)\cos\omega x + (\lambda b + \omega a)\sin\omega x]$
3.	$y' + \lambda y = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$	$y = Ce^{-\lambda x} + \frac{a}{\lambda + \omega}e^{\omega x} + \frac{b}{\lambda - \omega}e^{-\omega x}$
4.	$y' + \lambda y = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$	$y = (C + bx)e^{-\lambda x} + \frac{a}{2\lambda}e^{\lambda x}$
5.	$y'' + \lambda^2 y = a + bx + cx^2 + dx^3$	$y = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x + \frac{a}{\lambda^2} - 2\frac{c}{\lambda^4} + (\frac{b}{\lambda^2} - 6\frac{d}{\lambda^4})x + \frac{c}{\lambda^2}x^2 + \frac{d}{\lambda^2}x^3$
6.	$y'' + \lambda^2 y = a\cos\omega x + b\sin\omega x$	$y = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda^2 - \omega^2}(a\cos\omega x + b\sin\omega x)$
7.	$y'' + \lambda^2 y = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$	$y = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x - \frac{x}{2\lambda}(b\cos\lambda x - a\sin\lambda x)$
8.	$y'' - \lambda^2 y = a + bx + cx^2 + dx^3$	$y = C_1\cosh\lambda x + C_2\sinh\lambda x - \frac{a}{\lambda^2} - 2\frac{c}{\lambda^4} - (\frac{b}{\lambda^2} + 6\frac{d}{\lambda^4})x - \frac{c}{\lambda^2}x^2 - \frac{d}{\lambda^2}x^3$
9.	$y'' + ay' = b$	$y = C_1e^{-ax} + \frac{b}{a}x + C_2$
10.	$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}$	$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = a^2$
11.	$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2}$	$y = C_1 + a\cosh\left(\frac{x + C_2}{a}\right)$
12.	$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = a\cos\kappa x + b\sin\kappa x$ $(\lambda^2 = \omega^2 - \delta^2)$	$\lambda^2 > 0: \quad y = e^{-\delta x}(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x) + \frac{1}{4\delta^2\kappa^2 + (\omega^2 - \kappa^2)^2}\{[(\omega^2 - \kappa^2)a - 2\delta\kappa b]\cos\kappa x + [(\omega^2 - \kappa^2)b + 2\delta\kappa a]\sin\kappa x\}$ $\lambda^2 = 0: \quad y = e^{-\delta x}(C_1x + C_2) + \cdots$ $\lambda^2 < 0: \quad y = e^{-\delta x}(C_1\cosh\lambda x + C_2\sinh\lambda x) + \cdots$
13.	$y^{IV} + 4\lambda^4 y = a$	$y = e^{\lambda x}(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x) + e^{-\lambda x}(C_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x) + \frac{a}{4\lambda^4}$
14.	$y^{IV} - \lambda^4 y = a$	$y = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x + C_3\cosh\lambda x + C_4\sinh\lambda x - \frac{a}{\lambda^4}$